Федеральное агентство по образованию
Воронежский государственный университет

МАТЕМАТИКА
Числовые ряды. Функциональные ряды
(сборник задач)

Учебно-методическое пособие для студентов

Специальности :

020804 – геоэкология,

020304 – гидрогеология и инженерная геология

Воронеж
2005

Утверждено научно-методическим советом математического факультета
2 сентября 2005 года
Протокол № 1

Составители: Савченко Ю.Б., Ткачева С.А.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета

Рекомендуется для студентов 2 курса дневного отделения геологического факультета, обучающихся по специальностям: геоэкология, гидрогеология и инженерная гидрогеология.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с действующей программой курса «Математика» для студентов геологического факультета, содержит краткие теоретические сведения и подробное решение типичных примеров по разделу «Числовые ряды. Функциональные ряды».

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Понятие числового ряда

Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *Выражение вида*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется *числовым рядом* или просто *рядом*.

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называют членами ряда, член a_n с произвольным номером – *общим членом ряда*. Суммы конечного числа членов ряда

$$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \ldots; S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;$$

называются *частичными суммами ряда* (1).

Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы образуют бесконечную последовательность частичных сумм:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n \ldots \qquad (2)$$

Ряд (1) называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм (2) сходится к какому – нибудь числу S, которое в этом случае называется *суммой ряда* (1)

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad \text{или} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3)$$

Если же последовательность частичных сумм расходится, то ряд (1) называется *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Рассмотрим сумму S_n - первых n - членов ряда

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Слагаемые этой суммы могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ldots.$$

Очевидно, $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad (n=1,2,3,\ldots)$

Поэтому

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=1-\frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=1.$$

Пример 2. Установим, сходится или расходится ряд

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$$

Последовательность его частичных сумм имеет вид: $S_1=1$, $S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0$, … и, следовательно, не сходится ни к какому пределу, поэтому данный ряд расходится.

Пример 3. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $1, q, q^2, q^3, \ldots, q^{n-1}, \ldots$:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}.$$

Если $q\neq 1$, то, как известно,

$$S_n=1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^{n-1}\cdot q-1}{q-1},$$

или

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}.$$

1. При $|q|<1$, $S_n=\frac{1}{1-q}$,

т.е. ряд сходится и его сумма $S=\frac{1}{1-q}$.

2. При $q=1$ получаем ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$.

Следовательно, $S_n=n$ и $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$, т.е. ряд при $q=1$ расходится.

3. При $|q|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \infty$, т. е. ряд расходится.

1.2. Свойства сходящихся рядов

Если в ряде (1) отбросить конечное число первых членов, например m-членов, то получим ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{m+k} + \ldots, \qquad (3)$$

который называется **m**-м *остатком ряда* (1).

Теорема 1.1. *Ряд (3) сходится (или расходится) одновременно с рядом (1). Т. е. на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа членов.*

Обозначим через r_m - **m**- ый остаток ряда.

Теорема 2.1. *Предел суммы* r_m ***m****- го остатка сходящегося ряда* **(***1***)** *при* $m \to \infty$ *равен нулю.*

Теорема 3.1. *Если ряд* **(***1***)** *сходится и его сумма равна* ***S*,** *то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ *, где* c *- некоторое число, также сходится, и его сумма равна* cS .

Теорема 4.1. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и их суммы соответственно равны* S *и* s *, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *сходится и его сумма равна* $S + s$.

Теорема 5.1*(необходимый признак сходимости ряда).* *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Обратное утверждение неверно.

Пример 4. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \qquad (4)$$

Такой ряд называется гармоническим рядом. Очевидно, что для гармонического ряда выполнено необходимое условие сходимости, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Докажем расходимость ряда (4). Предположим, что ряд сходится и его сумма равна S.
Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного числа $e > 0$ *можно было подобрать такое* N, *что при* $n>N$ *и любом положительном* p *выполнялось неравенство*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < e$$

(критерий Коши).

Контрольные примеры

Написать простейшую формулу n-го члена ряда по указанным членам:

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$
3. $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \ldots$
4. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$
5. $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \ldots$
6. $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \ldots$
7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ldots$
8. $1 + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \ldots$
9. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$
10. $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \ldots$

Написать 4-5 первых члена ряда по известному общему члену a_n

11. $a_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}$; 12. $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$; 13. $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$;

14. $a_n = \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$; 15. $a_n = \dfrac{\left(2+\sin\dfrac{np}{2}\right)\cos np}{n!}$.

1.3. Ряды с неотрицательными членами

Теорема 6.1. *Для того чтобы ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

Достаточные условия сходимости числовых рядов.

Теорема 7.1(*признак сравнения*). *Если* $0 \le a_n \le b_n$, *начиная с некоторого* $n = n_0$, *и ряд*

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (5)$$

сходится, то и ряд (1) тоже сходится. Если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

Теорема 8.1(*общий признак сравнения*). *Если ряд (1) положительный, а ряд (5) строго положительный и существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c,$$

где c*=const,* $c \neq 0$, *то из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (1),а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (5) . В частности, если* $a_n \sim b_n$, *при* $n \to \infty$, *то ряды с членами* a_n *и* b_n *сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 5. Иссследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Сравниваем данный ряд со сходящимся рядом (см. пример 1).

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Очевидно,

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

Отсюда, согласно теореме 7, получаем, что данный ряд сходится.

Пример 6. Ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+...+\frac{1}{n\cdot 2^n}+...$$

сходится, т.к. здесь

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n},$$

причем ряд, составленный из элементов геометрической прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, знаменатель которой $q=\frac{1}{2}$, сходится.

Пример 7. Ряд

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}+...$$

расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\div\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

а ряд с общим членом $a_n=\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 8. Ряд

$$\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+...+\frac{1}{2^n-n}+...$$

сходится, т. к.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-n}\div\frac{1}{2^n}\right)=1\neq 0,$$

т.е. $\frac{1}{2^n-n}\sim\frac{1}{2^n}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{2^n}$ сходится.

Теорема 9.1*(признак Даламбера)*. *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *с положительными членами и существует предел* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$. *Тогда*

а) при $r<1$ *ряд сходится;*

б) при $r>1$ *ряд расходится.*

При $r=1$ *о сходимости ряда ничего сказать нельзя.*

Пример 9. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится.

Пример 10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1.$$

Теорема 10.1*(признак Коши).* *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *положителен и* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, *то при* $q<1$ *этот ряд сходится, а при* $q>1$ *расходится. При* $q=1$ *о сходимости ряда ничего сказать нельзя.*

Теорема 11.1*(интегральный признак Коши).* *Пусть члены ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *такие, что* $a_1=f(1)$, $a_2=f(2)$,..., $a_n=f(n)$, *где функция* $f(x)$ *при* $x\ge 1$ *непрерывна, положительна и убывает. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty}f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 11. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, $(a>0)$. (6)

Функция $f(x)=\frac{1}{x^a}$, $x\ge 1$ удовлетворяет условиям теоремы 11. Члены ряда (6) равны значениям этой функции при *x=1,2,3,…*. Как известно, несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^a}dx$ *при* $a>1$ *сходится, а при* $a\le 1$ *расходится.* Следовательно, данный ряд сходится при $a>1$ и расходится при $a\le 1$. Заметим, что при $a\le 0$ такие ряды также расходятся, так как их общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. нарушается необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 5).

Контрольные примеры

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения (или необходимый признак):

1. $1-1+1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$
2. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$
3. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots$
4. $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}+\ldots$
5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$
6. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{10n+1}+\ldots$
7. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$
8. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$
9. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$
10. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$
11. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}+\ldots$

Исследовать сходимость рядов (с помощью признаков Коши и Даламбера):

12. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$
13. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

14. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$

15. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5\ldots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n-1}+\ldots$

Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

1. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\ldots$

3. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+\ldots$

4. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\ldots$

5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$

6. $\frac{3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2\cdot 4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{2n+1}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}+\ldots$

7. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots+\frac{3n}{(3n+1)^2}+\ldots$

8. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\ldots$

9. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$

10. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{2^n+1}+\ldots$

11. $\frac{1!}{2+1}+\frac{2!}{2^2+1}+\frac{3!}{2^3+1}+\ldots+\frac{n!}{2^n+1}+\ldots$

12. $1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

13. $\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot\ldots\cdot 4n}+\ldots$

14. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$

15. $1000+\frac{1000\cdot 1002}{1\cdot 4}+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004}{1\cdot 4\cdot 7}+\ldots+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004\ldots(998+3n)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}+\ldots$

16. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\ldots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17\ldots(8n-11)(8n-7)}+\ldots$

17. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-4)(4n-2)}+\ldots$

18. $\frac{1}{1!}+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\cdot(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$

19. $1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n-1)}+\ldots$

20. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}+\ldots$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{n^2}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$;

25. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{ln\,n}$;

26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot ln\,n}$;

27. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot ln^2 n}$;

28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot ln\,n\cdot ln\,ln\,n}$;

29. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$;

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

32. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot ln\,n+\sqrt{ln^3 n}}$;

33. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$;

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\cdot(5\cdot\sqrt[3]{n}-1)}$;

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{p}{n}\right)$;

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$;

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{n^n}$

1.4. Знакочередующиеся ряды

Перейдем к рассмотрению рядов, члены которых имеют чередующиеся знаки. Будем считать, что первый член такого ряда положителен. Тогда знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \qquad (7)$$

где $a_n > 0$.

Теорема 12.1(*признак Лейбница*). *Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда (6) монотонно убывают:*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$$

и общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *, то ряд сходится.*

Пример 12. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

сходится, т. к. удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Рассмотрим теперь ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называют знакопеременными рядами. Возьмем какой-нибудь *знакопеременный* ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (8)$$

где числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение их в ряде произвольно.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда (8):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (9)$$

Теорема 13.1(*признак сходимости знакопеременных рядов*). *Если сходится ряд (9), то сходится и ряд (8).*

Определение 1. *Ряд (8) называют абсолютно сходящимся, если ряд (9) сходится. Если же ряд (8) сходится, а ряд (9) расходится, то ряд (8) называют неабсолютно сходящимся или условно сходящимся.*

Для исследования на абсолютную сходимость ряда (8) используются известные признаки сходимости знакоположительных рядов.

В частности, ряд (8) сходится абсолютно, если

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

В общем случае из расходимости ряда (9) не следует расходимости ряда (8). Но если

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

то расходится не только ряд(8), но и ряд (9).

Для остатка ряда r_n в этом случае справедлива оценка $|r_n| \le b_{n+1}$.

Пример 13. Исследовать сходимость ряда

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots.$$

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots$$

Т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

то данный ряд сходится абсолютно.

Ряд, рассмотренный в примере 12, сходится условно (неабсолютно), т.к. ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ - расходится (гармонический ряд).

Контрольные примеры

Исследовать сходимость следующих знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

1. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots$
2. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\ldots$
3. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$

4. $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-...+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+...$

5. $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-...+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}+...$

6. $-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}-...+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}+...$

7. $-\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{3\sqrt{3}-1}-\frac{4}{4\sqrt{4}-1}+...+(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}+...$

8. $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^3+...+(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+...$

9. $\frac{3}{2}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}-...+(-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot ...\cdot(3n-1)}+...$

10. $\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{7\cdot 9\cdot 11}-...+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot ...\cdot(2n+5)}+...$

11. $\frac{\sin a}{\ln 10}+\frac{\sin 2a}{(\ln 10)^2}+\frac{\sin 3a}{(\ln 10)^3}-...+\frac{\sin na}{(\ln 10)^n}+...$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n}$; 13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} tg\,\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

2. Функциональные ряды.

2.1. Основные определения

Перейдем к рассмотрению рядов, членами которых являются не числа, а функции:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+... \qquad (1)$$

Такие ряды называются *функциональными*. Например, ряд

$$1+x+x^2+x^3+...+x^3+...$$

является функциональным.

Если в ряде (1) придать x какое-либо значение x_0 из области определения функции $u_n(x)$, $n=1,2,3,...$, то получим числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+...+u_n(x_0)+... \qquad (2)$$

Этот ряд может сходиться или расходиться. Если он сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда (1). Если ряд (2) расходится, то точка x_0 называется точкой расходимости функционального ряда (1). Для одних точек, взятых из области определения функции $u_n(x)$, ряд (1) может *сходиться*, а для других - *расходиться*.

Определение 2.1. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называют *областью его сходимости*.

Сумма $S(x)$ функционального ряда (1) является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости ряда (1). В этом случае пишут

$$S(x)= u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$$

Сумму n первых членов ряда (n -ю частичную сумму) будем обозначать через $S_n(x)$, а остаток ряда – через $r_n(x)$.

$$S_n(x)= u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$$

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)$$

Из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел частичной суммы $S_n(x)$ при $n\to\infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости, частичная сумма $S_n(x)$ не имеет предела.

Если ряд сходится, при некотором значении x, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x),\ \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

Для определения области сходимости ряда (1) достаточно применить к этому ряду известные признаки сходимости, считая x фиксированным.

Пример 1. Определить область сходимости ряда

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Обозначим через $u_n(x)$ общий член ряда, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}\,2^n n}{2^{n+1}(n+1)|x+1|^n}=\frac{|x+1|}{2}.$$

На основании признака Даламбера можно утверждать, что ряд сходится (и притом абсолютно), если $\frac{|x+1|}{2}<1$, т.е. при –3< x<1; ряд расходится, если $\frac{|x+1|}{2}>1$, т.е. если $-\infty<x<-3$ или $1<x<\infty$. При $x=1$ получаем гармонический ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, который расходится, а при $x=-3$ -ряд:

$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...,$ который (в соответствии с признаком Лейбница) сходится не абсолютно. Следовательно, ряд сходится при $-3 \le x < 1$.

Контрольные примеры

Найти область сходимости ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)^2}$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \cdot \sin x}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, x^n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{x^{n^n}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right)$.

2.2. Степенные ряды

Определение 2.2. *Степенным рядом* называется функциональный ряд

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + ... + a_n(x-x_0)^n + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (3)$$

Числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*. В частности, если $x_0 = 0$. Будем иметь степенной ряд, расположенный по степеням x:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (4)$$

В дальнейшем будем рассматривать именно такие степенные ряды, потому что всякий степенной ряд (1) подстановкой $x - x_0 = x_1$ преобразуется к ряду указанного вида.

Теорема 2.1(*теорема Абеля*). *Если степенной ряд (4) сходится в точке* $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, *то он сходится, и при том абсолютно, для всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x| < |x_0|$; *если ряд (4) расходится при* $x = x_1$, *то он расходится для всех x, удовлетворяющих условию* $|x| > |x_1|$

Очевидно, что степенной ряд (4) сходится при $x = 0$.

Для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число R, что для всех *x*, таких что: $|x| < R$, ряд абсолютно сходится, а для всех x, таких что: $|x| > R$, ряд расходится.

Определение 2.3. *Радиусом сходимости* степенного ряда (4) называется такое число R, что для всех *x*, $|x| < R$, степенной ряд сходится, а для всех *x*, $|x| > R$, расходится. Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости.

Для степенных рядов вида (3) интервалом сходимости будет интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Теорема 2.2. *Если существует предел* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \neq 0$, *то радиус сходимости степенного ряда (4) равен* $R = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Пример 2. Найдем радиус сходимости ряда

$$1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} x^n + \ldots$$

Имеем

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно на всей числовой прямой.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$ расходится на всей числовой прямой, кроме точки $x = 0$, так как его радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0\,.$$

Пример 4. Найдем радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x^n|}{n}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1\,.$$

Следовательно, по теореме 2.2 данный ряд сходится на интервале (-1,1). Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x=-1$, $x=1$. При $x=1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а при $x=-1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится в любой точке полуинтервала $[-1,1)$ и расходится вне его.

Контрольные примеры

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n+1)^2x^n$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}x^n$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n\cdot ln\,n}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ \cdot\ln(n+1)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

2.3. Свойства степенных рядов

Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (5)$$

интервал сходимости которого $(-R,R)$. В этом случае говорят, что на интервале $(-R,R)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (или ряд по степеням *x*).

Теорема 2.3. *Если функция $f(x)$ на интервале $(-R,R)$ разлагается в степенной ряд (5), то она дифференцируема на этом интервале и ее производная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием ряда (5), т.е.*

$$f'(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)'\ =a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots.$$

Аналогично могут быть вычислены производные любого порядка функции $f(x)$. При этом соответствующие ряды имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (5).

Теорема 2.4. *Если функция $f(x)$ на интервале $(-R,R)$ разлагается в степенной ряд (5), то она интегрируема в интервале $(-R,R)$ и интеграл от* *нее может быть вычислен почленным интегрированием ряда (5), т.е., если* $x_1, x_2 \in (-R, R)$, *то*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots)dx = \int_{x_1}^{x_2} a_0dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1xdx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} a_nx^ndx + \ldots$$

Контрольные примеры

Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти суммы рядов:

1. $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} + \ldots$
2. $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots$
3. $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$
4. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$
5. $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$
6. $1 - 3x^2 + 5x^4 - \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \ldots$
7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1} + \ldots$

Найти суммы рядов:

8. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3} + \ldots + \dfrac{n}{x^n} + \ldots$
9. $x + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^9}{9} + \ldots + \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$

2.4. Разложение функций в степенные ряды

Теорема 2.5. *Если функция* $f(x)$ *на интервале* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *разлагается в степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (6)$$

то это разложение единственно.

Ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ..., \quad (7)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$, коэффициенты этого ряда

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

называют *коэффициентами Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x.

Таким образом, если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $x - x_0$, то этот ряд обязательно является рядом Тейлора этой функции.

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \quad (8)$$

Замечание. Все рассуждения были сделаны в предположении, что функция $f(x)$ *может быть разложена в степенной ряд*.

Пусть теперь функция $f(x)$ в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ имеет производные любого порядка. Тогда для любого x из этого интервала и для любого n будет справедлива *формула Тейлора*

$$f(x) =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ... + r_n(x), \quad (9)$$

где

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + q(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0) \quad (10)$$

Формула Маклорена для любой бесконечно дифференцируемой функции имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... + R_n(x), \quad (11)$$

где остаточный член

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ x=qx,\ \ 0<q<1 \tag{12}$$

Если обозначить через $S_n(x)$ частичную сумму ряда Маклорена, то формулу (11) можно записать так:

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x) \tag{13}$$

Теорема 2.6. *Для того чтобы ряд Маклорена (8) сходился на интервале* $(-R,R)$ *и имел своей суммой функцию* $f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы на* $(-R,R)$ *остаточный член* $R_n(x)$ *формулы Маклорена (12) стремился к нулю при* $n\to\infty$, *т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ *для любого* $x\in(-R,R)$.

Пример 5. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^x$. Так как,

$f^{(n)}(x)=e^x$ и $f^{(n)}(0)=1$,

по формуле (8) для функции e^x составим ряд Маклорена

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{14}$$

Найдем интервал сходимости ряда (14)

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\infty.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой.

Докажем теперь, что функция e^x - сумма ряда (14). В силу необходимого условия сходимости ряда для любого x справедливао равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0. \tag{15}$$

Так как $f^{(n+1)}(x)=e^x$, то

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $x=qx$, $0<q<1$. Отсюда, учитывая, что $e^x<e^{|x|}$, получаем

$$|R_n(x)|=\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

В силу (15)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0,\ \text{следовательно,}\ \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n!}=0.$$

Поэтому, переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при любом x и , следовательно, функция e^x является суммой ряда (14).

Пример 6. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin x$. Здесь $f^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{kp}{2})$, $f^{(k)}(0) = \sin\frac{kp}{2} = 0$ при $k = 2n$,
$f^{(k)}(0) = (-1)^n$ при $k = 2n+1$

При этом $|f^{(n)}(x)| \le 1$ на всей числовой оси. Поэтому получим ряд для функции $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

при всех $x \in (-\infty, \infty)$

Аналогично для $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Контрольные примеры

Разложить по целым положительным степеням x указанные функции, найти интервалы сходимости полученных рядов и исследовать поведение их остаточных членов:

1. $a^x, (a > 0)$.
2. $\sin(x + \frac{p}{4})$.
3. $\cos(x + a)$.
4. $\sin^2 x$.
5. $\ln(2 + x)$.

Написать разложение по степеням x и указать интервалы сходимости рядов:

6. $\cos^2 x$.
7. $\sin 3x + x\cos 3x$.
8. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$.
9. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.
10. xe^{-2x}.
11. e^{x^2}.
12. $\cos 2x$.
13. $\frac{x}{9+x^2}$.

14. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 15. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

16. $\ln(1+x-2x^2)$.

Применяя дифференцирование, разложить по степеням x следующие функции и указать интервалы, в которых эти разложения имеют место:

17. $(1+x)\ln(1+x)$. 18. $arctgx$.

19. $\arcsin x$. 20. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Применяя различные приемы, разложить по степеням x заданные функции и указать интервалы, в которых эти разложения имеют место:

21. $\sin^2 x\cos^2 x$. 22. $(1+x)e^{-x}$.

23. $(1+e^x)^3$. 24. $\sqrt[3]{8+x}$.

25. $\dfrac{1}{1-x^4}$. 26. $\ln(x^2+3x+2)$.

Написать три первых отличных от нуля члена разложения в ряд по степеням x функций.

27. tgx. 28. $e^{\cos x}$.

29. $\ln\cos x$. 30. $e^x\sin x$.

31. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $x-1$.

32. Разложить $\dfrac{1}{x}$ в ряд по степеням $x-1$.

33. Разложить $\dfrac{1}{x^2}$ в ряд по степеням $x+1$.

34. Разложить $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ в ряд по степеням $x+4$.

35. Разложить $\dfrac{1}{x^2+4x+7}$ в ряд по степеням $x+2$.

36. Разложить e^x в ряд по степеням $x+2$.

37. Разложить $\sqrt{x}$ в ряд по степеням $x-4$.

38. Разложить $\cos x$ в ряд по степеням $x-\dfrac{p}{2}$.

39. Разложить $\cos^2 x$ в ряд по степеням $x - \frac{p}{4}$.

40. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $\frac{1-x}{1+x}$.

41. Какова величина допущенной ошибки, если приближенно положить $t \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$?

42. С какой точностью будет вычислено число $\frac{p}{4}$, если воспользоваться рядом

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

взяв сумму его первых пяти членов при $x = 1$?

43. Сколько нужно взять членов ряда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

чтобы вычислить $cos 18^{\circ}$ с точностью до 0,001?

44. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

чтобы вычислить $sin 15^{\circ}$ с точностью до 0,0001?

45. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

чтобы найти число e с точностью до 0,0001?

46.Сколько нужно взять членов ряда

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots,$$

чтобы вычислить $ln 2$ с точностью до 0,01, 0,001?

47. Вычислить $\sqrt[3]{7}$ с точностью до 0,01 с помощью разложения функции $\sqrt[3]{8 + x}$ в ряд по степеням x.

48. Вычислить $\sqrt[4]{19}$ с точностью до 0,001.

49. При каких значениях x приближенная формула

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

дает ошибку, не превышающую 0,01, 0,001, 0,0001?

50. При каких значениях x приближенная формула

$$sin\, x \approx x,$$

дает ошибку, не превышающую 0,01, 0,001?

3. Ряды Фурье

3.1 Тригонометрический ряд и его основные свойства

3.1. ***Определение 3.1***. *Ряд вида*

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+...+a_n\cos nx+b_n\sin nx+...=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

называется *тригонометрическим рядом*; а числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...$- *коэффициентами тригонометрического ряда.*

Теорема 3.1. *Если функция* $f(x)$ *определена и интегрируема на отрезке* $[-p, p]$*, разлагается в тригонометрический ряд*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (2)$$

который можно интегрировать почленно, то это разложение единственно.

Коэффициенты a_0, a_n, b_n *определяются формулами:*

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx. \qquad (3)$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos nx dx. \qquad \mathbf{(4)}$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin nx dx. \qquad \mathbf{(5)}$$

<u>Определение</u> 3.2. Пусть $f(x)$ *- функция, определенная на отрезке* $[-p, p]$*. Тогда числа* a_0, a_n, b_n*, найденные по формулам (3)-(5), называются коэффициентами Фурье, а ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

с этими коэффициентами называется рядом Фурье функции $f(x)$

<u>Замечание</u>. Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-p, p]$, *четная,* тогда ее коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$b_n = 0, \qquad a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos nxdx. \qquad \textbf{(6)}$$

Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-p, p]$, *нечетная,* тогда ее коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin nxdx. \qquad \textbf{(7)}$$

Таким образом, если функция $f(x)$, четная, то ряд Фурье содержит только косинусы и только синусы, если функция $f(x)$ нечетная.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Эта функция нечетная, ее коэффициенты находятся по формулам (7). Имеем

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin nxdx =$$

$$= \frac{2}{p}\int_0^p x\sin nxdx = \frac{2}{p}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n}\int_0^p \cos nxdx\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Таким образом, получаем ряд Фурье данной функции

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

Ряд Фурье с периодом 2l

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l, l]$ (l-произвольное положительное число) и разлагается на этом отрезке в ряд Фурье. Тогда формула (2) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{np}{l}x + b_n \sin\frac{np}{l}x), \qquad (8)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx. \qquad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{np}{l}xdx, \qquad n = 1,2,3,\ldots. \qquad \textbf{(10)}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{np}{l}xdx, \qquad n = 1,2,3,.... \qquad \textbf{(11)}$$

Контрольные примеры

Разложить в ряд Фурье следующие функции на промежутке $[-p, p]$

1. $f(x) = |x|$.
2. $f(x) = p + x$.
3. $f(x) = x^2$.
4. $f(x) = e^x$.
5. $f(x) = \sin x$.
6. $f(x) = \cos x$.
7. $f(x) = \sin ax$.
8. $f(x) = \cos ax$.
9. $f(x) = e^{ax}$.
10. $f(x) = shx$.
11. $f(x) = chx$.

В указанных интервалах разложить в ряд Фурье функции:

12. $f(x) = |x|$, $(-1 \le x \le 1)$
13. $f(x) = 2x$, $(0 \le x \le 1)$
14. $f(x) = e^x$, $(-l \le x \le l)$
15. $f(x) = 10 - x$, $(-5 \le x \le 15)$

Разложить в неполные ряды Фурье: а) по синусам кратных дуг; б) по косинусам кратных дуг следующие функции:

16. $f(x) = 1$, $(0 \le x \le 1)$.
17. $f(x) = x$, $(0 \le x \le l)$.
18. $f(x) = x^2$, $(0 \le x \le 2p)$.
19. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$

20. Разложить по косинусам кратных дуг в интервале $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \frac{3}{2}<x\le 2 \\ 3-x, & 2<x<3. \end{cases}$$

Используемая литература

1. Баврин И.И. Высшая математика / И.И. Баврин. - М. : Изд. Центр «Академия»; Высш. шк., 2000. – 616 с.
2. Шипачев В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. - М. : Высш. шк., 2001. – 479 с.
3. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. – М. : Высш. шк., 1998. – 304 с.

Электронный каталог Научной библиотеки ВГУ – (http://www.lib.vsu.ru)

Составители: Савченко Юлия Борисовна

Ткачева Светлана Анатольевна

Редактор Тихомирова О.А